Problème

Un point matériel M, de masse m, accroché à un ressort, glisse à l'intérieur d'un tube, de faible section, dont une extrémité O est fixe dans le référentiel $\Re(O,x,y,z)$. Ce tube a par rapport à $\Re$ un mouvement quelconque caractérisé par les paramètres θ et φ.

On appelle $\Re_T(O,r,\theta,\varphi)$ le référentiel sphérique lié au tube T.

1°/ Calculer la vitesse et l'accélération relatives de M.

2°/ Calculer la vitesse d'entraînement, en déduire la vitesse absolue de M.

3°/ Calculer les accélérations d'entraînement et de coriolis, en déduire l'accélération absolue de M.

4°/ On se place dans la cas particulier où $\theta = \pi/2$ et $\varphi = \omega t$ ($\omega = Cte$). Le tube T est donc animé d'un mouvement de rotation uniforme, autour de l'axe Oz, dans le plan horizontal Oxy. On suppose que $\Re$ est galiléen, que le point matériel M glisse sans frottement à l'intérieur du tube et qu'il est soumis, en plus de son poids $\vec{P}$, à une force $\vec{F} = -K.\overrightarrow{OM}$.

a) Que devient les expressions des vitesses $\overrightarrow{V_r}(M)$, $\overrightarrow{V_e}(\Re_T/\Re)$, et $\overrightarrow{V_a}(M)$

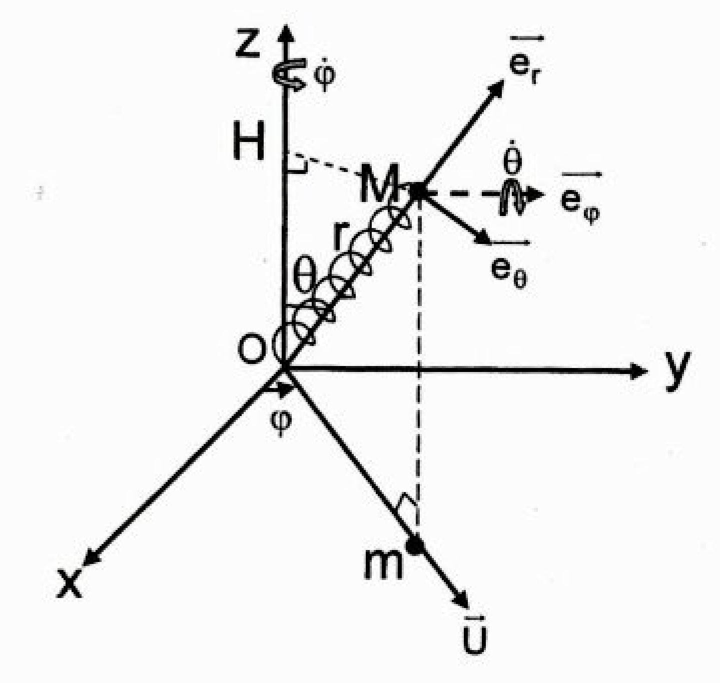
b) Que devient les expressions des accélérations $\overrightarrow{\gamma_r}(M)$, $\overrightarrow{\gamma_e}(\Re_T/\Re)$, $\overrightarrow{\gamma_c}(\Re_T/\Re)$ et $\overrightarrow{\gamma_a}(M)$

c) Quelles sont les forces qui s'exercent sur la masse m selon que l'on se place dans le référentiel galiléen $\Re$ ou dans $\Re_T$?

d) En utilisant le principe fondamental de la dynamique, écrire les équations différentielles du mouvement et les résoudre dans le cas où $\omega^2 < \frac{K}{m}$.

Remarque : les conditions initiales sont : à t=0, $r = a$ et $\dot{r} = 0$.

Solution :





1°/ $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \Rightarrow \vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R_T = \dot{r}\vec{e}_r$ et $\vec{\gamma}_r = \ddot{r}\vec{e}_r$

2°/ $\vec{V}_e = \vec{\omega}(R_T/R) \wedge \overrightarrow{OM} = (\dot{\varphi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge \overrightarrow{OM} = (\dot{\varphi}\cos\theta\vec{e}_r - \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\theta + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge r\vec{e}_r$

$\Rightarrow \vec{V}_e = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi$. D'où $\vec{V}_a = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi$

3°/ $\vec{\gamma}_e = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = \left[(\ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta)\vec{e}_r - (\ddot{\varphi}\sin\theta + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{e}_\theta + \ddot{\theta}\vec{e}_\varphi\right] \wedge r\vec{e}_r$

$-r(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2)\vec{e}_r - r(\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{e}_\theta + r(\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{e}_\varphi$

D'où $\vec{\gamma}_e = -r(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2)\vec{e}_r - r(\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - \ddot{\theta})\vec{e}_\theta + r(2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + \ddot{\varphi}\sin\theta)\vec{e}_\varphi$

$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r = 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi$

$\vec{\gamma}_a = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + (2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{e}_\varphi$

4°/ On se place dans la cas particulier où $\theta = \pi/2$ et $\varphi = \omega t$ ($\omega = Cte$) $\Rightarrow$

$\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ et $\dot{\varphi} = \omega, \ddot{\varphi} = 0$

a) $\vec{V}_r = \dot{r}\vec{e}_r$, $\vec{V}_e = r\omega\vec{e}_\varphi$ et $\vec{V}_a = \dot{r}\vec{e}_r + r\omega\vec{e}_\varphi$

b) $\vec{\gamma}_r = \ddot{r}\vec{e}_r$, $\vec{\gamma}_e = -r\omega^2\vec{e}_r$, $\vec{\gamma}_c = 2\dot{r}\omega\vec{e}_\varphi$ et $\vec{\gamma}_a = (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\omega)\vec{e}_\varphi$

c) Dans $\mathfrak{R}$, les forces sont :

$\vec{P} = -mg\vec{e}_z = mg\vec{e}_\theta$ car $\theta = \pi/2$, $\vec{F} = -Kr\vec{e}_r$, $\vec{R} = R_\theta\vec{e}_\theta + R_\varphi\vec{e}_\varphi$ $(\vec{R} \perp \vec{e}_r)$

♣ Dans $\mathfrak{R}_T$, il y a (en plus de $\vec{P}$, $\vec{F}$, et $\vec{R}$) les forces d'inertie :

* $\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e = mr\omega^2\vec{e}_r$ * $\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c = -2m\dot{r}\omega\vec{e}_\varphi$

d) PFD dans $\mathfrak{R}_T$ est : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m\vec{\gamma}_r = m\ddot{r}\vec{e}_r \Rightarrow \begin{cases} mr\omega^2 - Kr = m\ddot{r} \\ mg + R_\theta = 0 \\ R_\varphi - 2m\dot{r}\omega = 0 \end{cases}$

D'où l'équation différentielle : $\ddot{r} + \left(\frac{K}{m} - \omega^2\right)r = \ddot{r} + \Omega^2 r = 0 \Rightarrow r = a\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m} - \omega^2}.t\right)$

Ainsi : $R_\theta = -mg$ et $R_\varphi = -2m\omega\sqrt{\frac{K}{m} - \omega^2}.\sin\sqrt{\frac{K}{m} - \omega^2}.t$




ETUSUP.com